1. Compito dell'8 gennaio 2024

Avete 2 ore e 40 minuti di tempo. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrice, cellulari, pena l'annullamento del compito. Scrivere chiaramente e motivare le risposte. Non saranno corretti esercizi scritti in modo illeggibile.

Esercizio 1. Sia V uno spazio vettoriale reale e siano v_1, v_2, v_3 tre vettori distinti, e supponiamo anche nessuno dei tre vettori sia multiplo di uno degli altri tre (cioè se $i \neq j$ non esiste un numero λ tale che $v_i = \lambda v_j$). Sia $U = \mathrm{Span}\{v_1, v_2\}$ e $W = \mathrm{Span}\{v_1, v_3\}$. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false. Se sono vere dimostrarle e se sono false fare un controesempio esplicito.

a) $U + W$ è generato da v_1, v_2, v_3;
b) $U \cap W$ è generato da v_1.

Esercizio 2. Sia $V = \mathbb{R}[t]_{\leqslant 3}$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a 3. Sia $L : V \longrightarrow \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare

$$L(f(t)) = \begin{pmatrix} f(1) \\ f(2) \\ f(1) + f(2) \\ f(1) - f(2) \end{pmatrix}$$

Sia W il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori $e_1 + 2e_2 + 3e_3 + e_4$ e $e_2 + e_3 + e_4$.

a) Determinare il rango di L
b) Descrivere l'immagine di L mediante equazioni (cioè in forma cartesiana).
c) Determinare una base dell'intersezione dell'immagine di L con il sottospazio W.

Esercizio 3. Sia

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad b_t = \begin{pmatrix} t \\ t \\ 1 \end{pmatrix}$$

con $t \in \mathbb{R}$. La matrice A è una matrice ortogonale. Sia $F_t : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione $F_t(v) = A \cdot v + b_t$.

a) Determinare se L_A è una rotazione o una antirotazione e determinarne un asse.
b) Determinare per quali valori di t l'applicazione F_t è una rotazione.

Esercizio 4. Sia W il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ definito dall'equazione

$$x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0.$$

a) Descrivere un prodotto scalare b di segnatura $(3, 1, 0)$ su $\mathbb{R}^4$ tale che la sua restrizione a W sia definita positiva, fornendo la matrice associata a b rispetto ad una base scelta a piacere. A scanso di equivoci si richiede che sia la base scelta che la sua matrice associata siano esplicite.
b) Determinare la matrice associata al prodotto scalare b rispetto alla base standard di $\mathbb{R}^4$

2. Soluzioni del compito dell'8 gennaio 2024

Soluzione dell'esercizio 1. a) è vera. Infatti ogni vettore di $U + W$ si può come somma di $u \in U$ e $w \in W$. Per definizione di U e W esistono $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tali che $u = av_1 + bv_2$ e $w = cv_1 + dv_3$. Quindi

$$u + w = (a + c)v_1 + bv_2 + dv_3 \in \mathrm{Span}\{v_1, v_2, v_3\}.$$

b) è falsa. Per esempio se $V = \mathbb{R}^2$ $v_1 = (1, 0)$ $v_2 = (0, 1)$ e $v_3 = (1, 1)$

Soluzione dell'esercizio 2. a) Il nucleo di L è dato dai polinomi $f(t)$ di grado minore o uguale a 3 tali che $f(1) = f(2) = 0$. Ovvero dai polinomi della forma

$$(t - 1)(t - 2)(at + b) = at(t - 1)(t - 2) + b(t - 1)(t - 2)$$

con a e b a piacere. Il nucleo ha quindi dimensione 2, e per il teorema della dimensione il rango è pure uguale a 2.

b) Sia (x, y, z, w) un vettore nell'immagine. Quindi esiste un polinomio f tale che $x = f(1)$, $y = f(2)$, $z = f(1) + f(2) = x + y$, $w = f(1) - f(2) = x - y$. In particolare tutti i punti nell'immagine verificano le equazioni

$$z = x + y \qquad w = x - y$$

Sia U lo spaziodescritto da queste due equazionim quindi $U \supset Im\, L$. Il sottospazio U ha dimensione 2 perché ci sono due variabili libere. Poiché anche l'immagine ha dimensione 2, abbiamo che sono uguali e quindi l'immagine è descritta dalle due equazioni sopra.

c) Un generico vettore di W si scrive nella forma

$$v = a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 2a+b \\ 3a+b \\ a+b \end{pmatrix}.$$

Il vettore v appartiene all'immagine se verifica le equazioni che descrivono l'immagine calcolare al punto precedente quindi se

$$3a + b = a + 2a + b \qquad a + b = a - (2a + b)$$

la prima equazione si riduce a $0 = 0$ e quindi è sempre soddisfatta, e la seconda a $b = -a$. Quindi l'intersezione è fatta dai vettori

$$a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - a \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

In particolare

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

è una base dell'intersezione.

Soluzione dell'esercizio 3. a) Il determinante di A è uguale ad 1, quindi si tratta di una rotazione. L'asse della rotazione $\mathcal{R}$ è composto dai vettori fissati da L_A ed è quindi la retta per l'origine generata da $(1, 1, 1)$.

b) Essendo A la matrice associata ad una rotazione attorno all'asse $\mathcal{R}$, l'applicazione F_t è una rotazione o una glissorotazione rispetto ad un asse parallelo all'asse $\mathcal{R}$.

È una rotazione attorno ad un'asse quando F_t ha punti fissi e una glissoriflessione quando non ne ha. Determiniano quindi quando F_t ha punti fissi. Dobbiamo vedere quando l'equazione

$$F_t(v) = v \qquad \text{ovvero} \qquad A \cdot v + b_t = v.$$

ovvero b_t appartiene all'immagine di $L_A - id$. Da

$$A - I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

ricaviamo che l'immagine di $A - I$ è descritta dall'equazione $x + y + z = 0$. Quindi F_t è una rotazione quando

$$t + t + 1 = 0$$

ovvero per $t = -1/2$.

Soluzione dell'esercizio 4. a) Sia $v_1 = e_1$, $v_2 = e_1 + e_2$, $v_3 = e_1 + e_3$, $v_4 = e_1 + e_4$. Osserviamo che v_2, v_3, v_4 è una base di W e che v_1, v_2, v_3, v_4 è una base di $\mathbb{R}^4$. Sia b il prodotto scalare che ha come matrice associata rispetto a questa base la matrice:

$$[b]_{v_1,v_2,v_3,v_4} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Questo è un prodotto scalare che ha le proprietà richieste.

b) Osserviamo che $e_1 = v_1$, $e_2 = v_2 - v_1$, $e_3 = v_3 - v_1$, $e_4 = v_4 - v_1$. Quindi

$$b(e_1, e_1) = b(v_1, v_1) = -1 \qquad b(e_1, e_i) = b(v_1, v_i - v_1) = 1.$$

e

$$b(e_i, e_i) = b(v_i - v_1, v_i - v_1) = 0. \qquad b(e_i, e_j) = b(v_i - v_1, v_j - v_1) = -1.$$

per $i \neq j$ maggiori o oguali a 2. Quindi

$$A = [b]_{e_1,e_2,e_3,e_4} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$